

PRODUIT SCALAIRE

I. Définition

1. L'expression $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ est appelée produit scalaire des vecteurs \vec{u} et \vec{v} et est notée $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Exemple : Si $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$, on aura

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 5 \times \cos \frac{\pi}{3} = 2 \times 5 \times \frac{1}{2} = 5$$

remarque : $\vec{u} \cdot \vec{u}$ se note \vec{u}^2 . De plus, $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.

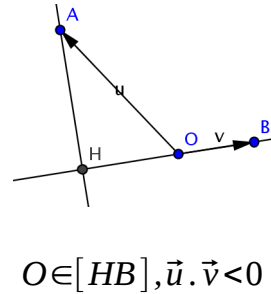
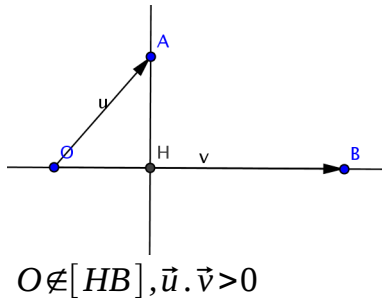
2. Si on considère trois points O , A et B tels que $\vec{u} = \vec{OA}$ et $\vec{v} = \vec{OB}$ et si on appelle H le projeté orthogonal de A sur (OB) , alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{OA} \cdot \vec{OB} = OH \times OB \quad \text{si } O \notin [HB] \text{ et}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{OA} \cdot \vec{OB} = -OH \times OB \quad \text{si } O \in [HB]$$

car $OH = OA \times |\cos(\vec{OA}, \vec{OB})|$.

Remarque : Dans tous les cas, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OH} \cdot \vec{OB}$



II. Propriétés

1. Propriété fondamentale

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ équivaut à \vec{u} et \vec{v} orthogonaux.

Remarque : Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

2. Règles de calcul

pour tous vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} , et tout nombre réel a on a

a. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

b. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

c. $a \times (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (a\vec{u}) \cdot \vec{v}$

3. Identités remarquables

a. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$.

b. $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$.

c. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$.

4. Conséquence

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) \text{ et}$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) .$$

III.Expression analytique

Dans un repère orthonormal, si on a $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ alors
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.