CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 8	
Suites et angles orientés	***Le mercredi 12 avril 2017***

Exercice 1

1. $\frac{117\pi}{8} - \frac{5\pi}{8} = \frac{112\pi}{8} = 14\pi = 7\times 2\pi$. Par conséquent, $\boldsymbol{\frac{5\pi}{8}}$ **et** $\boldsymbol{\frac{117\pi}{8}}$ **repèrent le même point sur le cercle trigonométrique.**

2. a) On cherche la valeur de l'entier k tel que $-\pi < -\frac{5\pi}{3}+2k\pi \leq \pi$.

   Or $-\pi < -\frac{5\pi}{3}+2k\pi \leq \pi$ équivaut à $-\pi+\frac{5\pi}{3} < 2k\pi \leq \pi+\frac{5\pi}{3}$, c'est-à-dire à $\frac{2\pi}{3} < 2k\pi \leq \frac{8\pi}{3}$.

   D'où $-\pi < -\frac{5\pi}{3}+2k\pi \leq \pi$ équivaut à $\frac{2\pi}{3}\times\frac{1}{2\pi} < 2k\pi\times\frac{1}{2\pi} \leq \frac{8\pi}{3}\times\frac{1}{2\pi}$, c'est-à-dire à $\frac{1}{3} < k \leq \frac{4}{3}$. Par suite, $\boldsymbol{k=1}$.

   Par conséquent, **la mesure la mesure principale de** $\boldsymbol{-\frac{5\pi}{3}}$ **est** $\boldsymbol{-\frac{5\pi}{3}+2\pi=\frac{\pi}{3}}$ **.**

   b) On cherche la valeur de l'entier k tel que $-\pi < -\frac{117\pi}{7}+2k\pi \leq \pi$.

   Or $-\pi < -\frac{117\pi}{7}+2k\pi \leq \pi$ équivaut à $-\pi+\frac{117\pi}{7} < 2k\pi \leq \pi+\frac{117\pi}{7}$, c'est-à-dire à $\frac{110\pi}{7} < 2k\pi \leq \frac{124\pi}{7}$.

   D'où $-\pi < -\frac{117\pi}{7}+2k\pi \leq \pi$ équivaut à $\frac{110\pi}{7}\times\frac{1}{2\pi} < 2k\pi\times\frac{1}{2\pi} \leq \frac{124\pi}{3}\times\frac{1}{2\pi}$, c'est-à-dire à $\frac{55}{7} < k \leq \frac{62}{7}$. Par suite, $\boldsymbol{k=8}$.

   Par conséquent, **la mesure la mesure principale de** $\boldsymbol{-\frac{117\pi}{7}}$ **est** $\boldsymbol{-\frac{117\pi}{7}+16\pi=-\frac{5\pi}{7}}$ **.**

3. a) $\boldsymbol{(\vec{u},2\vec{v})} = (\vec{u},\vec{v}) \boldsymbol{= \frac{\pi}{6}}$.

   b) $\boldsymbol{(\vec{v},-2\vec{u})} = (\vec{v},-\vec{u}) = \pi+(\vec{v},-\vec{u}) = \pi-(\vec{u},-\vec{v}) = \pi-\frac{\pi}{6} \boldsymbol{= \frac{5\pi}{6}}$ **.**

   c) $\boldsymbol{(-\vec{v},-\vec{u})} = (\vec{v},\vec{u}) = -(\vec{u},\vec{v}) \boldsymbol{= -\frac{\pi}{6}}$ **.**

Exercice 2

1. $\widehat{DCK} = \widehat{DCB}+\widehat{BCK}$; or $ABCD$ est un carré, alors $\widehat{DCB} = \frac{\pi}{2}$. De plus, CBK est un triangle équilatéral, alors $\widehat{BCK} = \frac{\pi}{3}$. Par conséquent, $\widehat{DCK} = \frac{5\pi}{6}$.

   $ABCD$ est un carré, $DC = CB$. De plus, CBK est un triangle équilatéral, alors $CB = CK$.

   Par suite, DCK est isocèle en C . D'où : $\widehat{CDK} = \widehat{CKD} = \frac{\pi-\widehat{DCK}}{2} = \frac{\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{\pi}{12}$.

   $\widehat{JAD} = \widehat{BAD}-\widehat{BAJ}$. Comme $ABCD$ est un carré, alors $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{2}$. De plus, ABJ est un triangle équilatéral, alors $\widehat{BAJ} = \frac{\pi}{3}$. Par conséquent, $\widehat{JAD} = \frac{\pi}{6}$.

Comme ADJ est isocèle en A, alors $\widehat{CDK} = \widehat{CKD} = \frac{\pi - \widehat{DCK}}{2} = \frac{\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{\pi}{12}$ .. Comme $ABCD$ est un carré, alors $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{2}$. De plus, ABJ est un triangle équilatéral, alors $\widehat{BAJ} = \frac{\pi}{3}$. Par conséquent, $\widehat{JAD} = \frac{\pi}{6}$.

Comme AJD est isocèle en A, alors $\widehat{ADJ} = \widehat{DJA} = \frac{\pi - \widehat{JAD}}{2} = \frac{\frac{5\pi}{6}}{2} = \frac{5\pi}{12}$.

2. D'après la relation de Chasles, $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DJ}) = (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}) + (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DJ})$.
   Or $\widehat{ADJ} = \frac{5\pi}{12}$, d'où $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DJ}) = \frac{5\pi}{12}$. De plus, $\widehat{ADC} = \frac{\pi}{2}$; alors $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}) = -\frac{\pi}{2}$.
   Par conséquent, $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DJ}) = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{12} = -\frac{\pi}{12}$.
3. D'après la question 1., $\widehat{CDK} = \frac{\pi}{12}$. Par conséquent, $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DK}) = -\frac{\pi}{12}$.
4. D'après la relation de Chasles,
   $(\overrightarrow{DJ}, \overrightarrow{DK}) = (\overrightarrow{DJ}, \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DK}) = -(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DJ}) + (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DK}) = -\left(-\frac{\pi}{12}\right) + \left(-\frac{\pi}{12}\right) = 0$.
   On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{DK}$ sont colinéaires et de même sens.
   Par conséquent, **les points D, J et K sont alignés**.

Exercice 3

a) $u_{n+1} - u_n = \frac{3(n+1)-2}{(n+1)+1} - \frac{3n-2}{n+1} = \frac{(3n+1)(n+1)-(3n-2)(n+2)}{(n+1)(n+2)}$.
   D'où $u_{n+1} - u_n = \frac{5}{(n+1)(n+2)}$. Comme n est un entier naturel, alors $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout entier naturel n. Par suite, **la suite (u_n) est strictement croissante.**

b) Comme tous les termes de cette suite sont strictement positifs, comparons $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1.
   $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{3n+3}}{3^{2n+2}}}{\frac{2^{3n}}{3^{2n}}} = \frac{2^{3n+3}}{3^{2n+2}} \times \frac{3^{2n}}{2^{3n}} = \frac{2^3}{3^2} = \frac{8}{9}$. Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ pour $u_n > 0$ pour tout entier naturel n, alors **la suite (u_n) est strictement décroissante.**

c) $u_n = f(n)$ avec f la fonction définie sur $[5;+\infty[$ par $f(x) = (x-5)^2$.
   On a $f = g^2$ avec $g(x) = x-5$. Comme la fonction g et la fonction g ont les mêmes variations puisque sur $[5;+\infty[$ $g(x) \geq 0$, et que la fonction g est strictement croissante sur $[5;+\infty[$ alors f est strictement croissante sur $[5;+\infty[$.
   Par conséquent, **la suite (u_n) est strictement croissante.**