Corrigé du D.S. n°9

Exercice 1

$A=\cos\frac{3\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{4}+\cos\frac{7\pi}{4}+\cos\frac{9\pi}{4}+\cos\frac{11\pi}{4}$

$=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(3\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$=-\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$B=\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{4\pi}{5}+\sin\frac{6\pi}{5}+\sin\frac{8\pi}{5}=\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{4\pi}{5}+\sin\left(2\pi-\frac{4\pi}{5}\right)+\sin\left(2\pi-\frac{2\pi}{5}\right)$

$=\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{4\pi}{5}-\sin\frac{4\pi}{5}-\sin\frac{2\pi}{5}=0$

Exercice 2

1. $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{1}{\tan x}$

2. $\tan\frac{5\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=\dfrac{1}{\tan\frac{\pi}{12}}=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$.

Exercice 3

1. $\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right)\Leftrightarrow\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$.

2. $\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{6}-x+2k\pi\\x=\pi-\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+2k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{12}+k\pi\\0=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+k\pi$ pour tout entier k .

3. Dans $]-\pi;\pi]$ on obtient (pour $k=-1$ et $k=0$) $S=\left\{-\frac{11\pi}{12};\frac{\pi}{12}\right\}$.

Exercice 4

1. $2\vec{u}\cdot(-5\vec{v})=-10\vec{u}\cdot\vec{v}=-10\times(-8)=80$.

2. $\vec{v}\cdot(\vec{u}-2\vec{v})=\vec{v}\cdot\vec{u}-2\vec{v}^2=-8-2\times4^2=-40$.

3. $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2=5^2+2\times(-8)+4^2=25$ donc $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\sqrt{25}=5$.

4. $\cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}=-\dfrac{8}{5\times4}=-\dfrac{2}{5}$.

Exercice 5

$\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow m(m-1)+2\times(-6)=0\Leftrightarrow m^2-m-12=0$. Le discriminant du trinôme m^2-m-12 est $\Delta=49$ puis $m_1=-3$ et $m_2=4$ qui sont donc les valeurs cherchées.

Exercice 6

1. Le cercle $\mathcal{C}$ a pour centre $I(3,2)$ et pour rayon $\frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}$.

   L'équation de $\mathcal{C}$ est donc : $(x-3)^2+(y-2)^2 = (\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow x^2+y^2-6x-4y+8=0$

   Remarque : On peut aussi considérer $\mathcal{C}$ comme l'ensemble des points M tels que $(AM)\perp(BM)$ ce qui donne $(x-1)(x-5)+(y-1)(y-3)=0$ et on arrive au même résultat.

2. La tangente en B au cercle $\mathcal{C}$ est la droite passant par B et perpendiculaire à (IB). C'est donc l'ensemble des points M tels que

   $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{IB}=0 \Leftrightarrow 2(x-5)+1(y-3)=0 \Leftrightarrow 2x+y-13=0$.

3. $x^2+y^2-6x+4y-12=0 \Leftrightarrow (x-3)^2-9+(y+2)^2-4-12=0 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+2)^2=5^2$.

   Il s'agit donc du cercle de centre $J(3,-2)$ et de rayon 5.

Exercice 7

1. $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AP'}+\overrightarrow{P'Q}) = \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP'}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{P'Q}$ or $[PP']$ est un diamètre du cercle C et Q est un point de C donc (PQ) et (PQ) sont perpendiculaires et $\overrightarrow{P'Q}\cdot\overrightarrow{AP}=0$, et donc $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP'}$.

   $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP'} = (\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP'}) = \overrightarrow{AO}^2+\overrightarrow{AO}\cdot(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OP'})+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP'} = AO^2-OP^2 = AO^2-R^2$

   (car $\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OP'}$)

2. On a donc $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ} = AO^2-R^2$ qui ne dépend pas des points P et Q, c'est -à-dire du choix de la droite passant par A. La propriété est donc établie.