

GRAPHES

1. Définitions et vocabulaire

1. Graphe, arête, sommet

Un graphe est un schéma formé de points et de traits reliant les points entre eux.

- Les points sont appelés sommets et les traits, arêtes.
 - Le nombre d'arêtes partant d'un sommet est appelé degré de ce sommet.
 - Deux sommets reliés entre eux par une arête sont dit adjacents.
 - Le nombre de sommet d'un graphe est appelé ordre de ce graphe.
 - Un graphe dont tous les sommets distincts sont reliés deux à deux est dit complet.
- Remarque : Une arête peut éventuellement relier un point à lui-même.

2. Sous-graphe

- Un sous-graphe est une partie des sommets d'un graphe avec toutes les arêtes qui les relient.
- Un sous-graphe sans arête est dit stable.

3. Graphe orienté

Un graphe orienté est un graphe pour lequel les arêtes ont un sens. Deux sommets peuvent donc être relié par deux arêtes distinctes.

4. Matrice associée à un graphe.

- Une matrice associée à un graphe est une matrice carrée de même ordre que le graphe dans laquelle le nombre de la i ème ligne et de la j ème colonne à pour valeur le nombre d'arêtes reliant le i ème point au j ème (Dans le sens i vers j en cas de graphe orienté)
- Propriété
Le nombre situé à la i ème ligne et à la j ème colonne de la matrice M^p est le nombre de chemins de longueur p reliant le i ème point au j ème.

2. Coloration

1. Colorer un graphe consiste à attribuer à chaque sommet une couleur de telle sorte que deux sommets adjacents soient de couleur différente. Il s'agit donc de séparer le graphe en sous-graphes stables.
2. Le nombre chromatique d'un graphe est le nombre minimal de couleurs nécessaires à sa coloration.

Propriétés

- Si on appelle d le plus haut degré des sommet d'un graphe G , alors le nombre chromatique de G est au plus égal à $d+1$.
- Le nombre chromatique est au moins égale à l'ordre du plus grand sous-graphe complet.

3. Cheminement

1. chaînes

- Une chaîne (ou chemin) est une suite d'arêtes reliant des sommets adjacents.
- Une chaîne fermée est une chaîne dont les points de départ et d'arrivée sont confondus. Si toutes les arêtes sont distinctes, on l'appelle cycle.
- Une chaîne parcourant une et une seule fois toutes les arêtes d'un graphe est appelé chaîne eulérienne.
- Un cycle parcourant toutes les arêtes d'un graphe est appelé cycle eulérien
- Un graphe connexe est un graphe pour lequel il existe toujours au moins une chaîne reliant deux sommets quelconques.
- Propriété

Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impaire est 0 ou 2.

Remarque : Si c'est 0, la chaîne est un cycle.

2. Diamètre

- La distance entre deux sommets d'un graphe connexe non-orienté est la longueur de la plus courte chaîne reliant ces deux sommets.
- Le diamètre d'un graphe connexe est la plus grande distance entre deux sommets de ce graphe.

4. Graphes étiquetés

1. Définition

Un graphe étiqueté est un graphe pour lequel une donnée est associée à chaque arête

2. Graphe pondéré

Un graphe pondéré est un graphe étiqueté pour lequel la donnée associée à chaque arête est un réel positif.

3. Poids d'une chaîne

Le poids d'une chaîne est la somme des valeurs affectées aux arêtes qui la composent. Une plus courte chaîne entre deux sommets est une chaîne de poids minimal.

4. Graphe probabiliste

Un graphe probabiliste est un graphe pondéré ont la somme es valeurs affectées aux arêtes sortant de chaque sommet est égale à 1.

5. Matrice

La matrice associée à un graphe pondéré est obtenue en utilisant la valeur de l'étiquette à la place de 1 pour chaque arête. Dans le cas d'un graphe probabiliste, cette matrice est appelée matrice de transition. La somme des coefficients de chaque ligne d'une matrice de transition est donc égale à 1.