

# FONCTION EXPONENTIELLE

## 1. Définition

Il existe une unique fonction  $f$  définie, continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que

$$f(0) = 1 \text{ et pour tout réel } x, f'(x) = f(x).$$

Cette fonction est appelée fonction exponentielle et notée  $\exp$ .

## 2. Propriétés algébriques

Pour tout réels  $a$  et  $b$ , on a :

a.  $\exp(a) > 0$ .

b.  $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$ .

c.  $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$ .

d.  $\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$ .

e.  $\exp\left(\frac{1}{2}a\right) = \sqrt{\exp(a)}$ .

f. Pour tout entier  $n$ ,  $\exp(na) = \exp(a)^n$ .

## 3. Limites, variations et représentation graphique

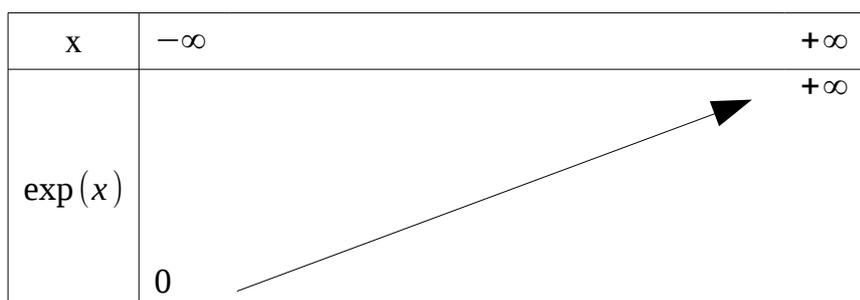
a. La fonction exponentielle est strictement croissante.

Conséquence :  $\exp(a) = \exp(b) \Leftrightarrow a = b$  et  $\exp(a) < \exp(b) \Leftrightarrow a < b$

b.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$ .

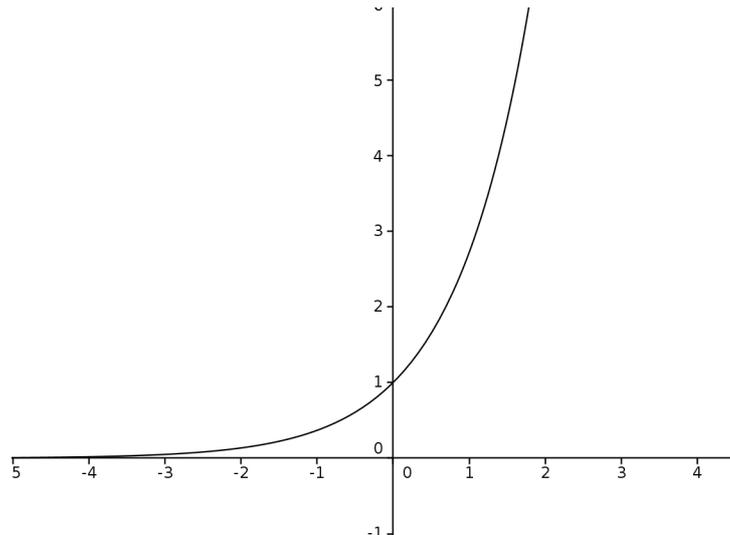
c. On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$\exp(x)$	0	$+\infty$



The table shows the variation of the exponential function. The x-axis ranges from  $-\infty$  to  $+\infty$ , and the y-axis ranges from 0 to  $+\infty$ . An arrow points from the bottom-left corner (0,  $-\infty$ ) towards the top-right corner ( $+\infty$ ,  $+\infty$ ), indicating that the function is strictly increasing.

d. Et la représentation graphique :



4. e

a. Le nombre  $\exp(1)$  se note  $e$ .  $e \approx 2,718$ .

b. Pour tout entier  $n$ ,  $\exp(n) = \exp(n \times 1) = \exp(1)^n = e^n$ . Par extension, pour

tout réel  $x$ , on pose  $e^x = \exp(x)$ . On a donc,  $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ ,  $e^{a+b} = e^a \times e^b$  et

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}.$$

5. Quelques limites

a.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ .

b.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ .

c.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ .

6. Dérivée de l'exponentielle d'une fonction

Si  $u$  est une fonction dérivable et si  $f(x) = e^{u(x)}$  alors  $f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$ .