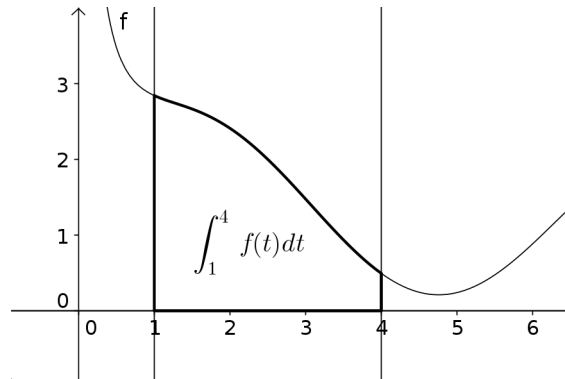


# INTÉGRATION

## 1. Définition

Si  $f$  est une fonction continue et positive et si  $a \leq b$ , alors on appelle intégrale de  $a$  à  $b$  de la fonction  $f$ , et on note  $\int_a^b f(t) dt$ , une mesure de l'aire du domaine compris entre les droites d'équations  $x=a$  et  $x=b$ , l'axe des abscisses et la courbe représentative de  $f$ .



Remarques importantes :

a. La définition précédente est une « simplification ». L'intégrale n'est pas une notion géométrique. Une définition plus exacte est la suivante :

Pour tout entier  $n > 0$  et tout entier  $i$  tel que  $0 \leq i < n$ , notons  $M_n(i)$  (resp  $m_n(i)$ ) le maximum (resp minimum) d'une fonction  $f$  sur l'intervalle

$\left[ a + \frac{(b-a)*i}{n}; a + \frac{(b-a)*(i+1)}{n} \right]$  (S'ils existent).

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} M_n(i) \times \frac{b-a}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} m_n(i) \times \frac{b-a}{n}$  et si cette limite est un réel, on l'appelle intégrale de  $a$  à  $b$  de la fonction  $f$ .

b. L'intégrale d'une fonction  $f$  sur un intervalle  $[a; b]$  représente la « somme » des valeurs de  $f$  sur  $[a; b]$ .

c.  $\int_a^b f(t) dt \geq 0$  et  $\int_a^a f(t) dt = 0$ .

## 2. Propriétés

a. Linéarité

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues et positives sur  $[a; b]$  alors pour tous réels positifs,  $\alpha$  et  $\beta$  on a :

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt$$

b. Relation de Chasles

Si  $f$  est une fonction intégrable sur un intervalle  $I$ , alors pour tous réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  de  $I$  :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

c. Ordre

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues, positives et telles que  $f(x) \leq g(x)$  sur  $[a; b]$  alors  $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$ .

### 3. Primitive d'une fonction

a. Définition

Étant donnée une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$ , On dit que la fonction  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$  si  $F' = f$  sur  $I$ .

b. Propriété

Si  $F_1$  et  $F_2$  sont deux primitives de  $f$  sur un intervalle  $I$ , alors  $F_2 - F_1$  est une fonction constante.

Conséquence : Si  $x_0 \in I$ , Il existe au plus une primitive de  $F$  sur  $I$  telle que  $F(x_0) = y_0$ .

c. Règles de calcul

Si  $F$  et  $G$  sont des primitives respectives des fonctions  $f$  et  $g$ , alors  $F+G$  est une primitive de  $f+g$  et pour tout réel  $\alpha$ ,  $\alpha F$  est une primitive de  $\alpha f$ .

Remarque : Il n'existe pas de règle de calcul pour le produit ou pour l'inverse. La détermination de primitives se fait seulement par lecture inverse du tableau de dérivation.

### 4. Intégration et primitives

a. Propriété fondamentale

Étant donnée une fonction  $f$  définie et intégrable sur un intervalle  $I$  et un réel  $a \in I$ , la fonction définie sur  $I$  par  $x \rightarrow \int_a^x f(t) dt$  est la primitive de  $f$  qui s'annule en  $a$ .

b. Conséquence

Si  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $[a; b]$  alors  $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$ .

(On peut noter la différence  $F(b) - F(a)$ ,  $[F(x)]_a^b$ )

c. Théorème

Toute fonction continue admet des primitives.

### 5. Définition généralisée

Si  $f$  est une fonction continue sur un intervalle  $[a; b]$  et si  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $[a; b]$ , on définit  $\int_a^b f(t) dt$  par  $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$ .

Remarque : Les propriétés vue au paragraphe 2 sont toujours vraies, y compris si  $b < a$ , si  $\alpha < 0$  ou si  $\beta < 0$ . On a en particulier  $\int_b^a f(t) dt = -\int_a^b f(t) dt$  et, si  $a \leq b$  et  $f(x) \leq g(x)$  alors  $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$ .

### 6. Valeur moyenne d'une fonction

Le réel  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$  est appelé valeur moyenne de la fonction  $f$  sur  $[a; b]$ .