

Devoir surveillé n°2**Exercice 1 (9 points)**

Soit u la suite numérique définie par :

$$u_0 = 0, u_1 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n.$$

1. Calculer les termes u_2, u_3 et u_4 de la suite u .
2. a. Montrer que la suite u vérifie, pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = 4u_n + 1$.
b. Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est un entier naturel.
c. En déduire que pour tout entier naturel n, u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux.

Exercice 2 (7 points)

1. Montrer que l'équation $x^2 \equiv 3(7)$ dont l'inconnue x est un entier relatif, n'a pas de solution.
2. Montrer la propriété suivante :
pour tous entiers relatifs a et b , si $7|(a^2+b^2)$ alors $7|a$ et $7|b$.

Exercice 3 (4 points)

Soit E l'ensemble des triplets d'entiers relatifs (u, v, w) tels que $3u + 13v + 23w = 0$. Montrer que pour un tel triplet $v \equiv w(3)$.